التمرين الأول

أحسب التكاملات التالية :

$$\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} (3x-1)\sqrt{3x-1}\,dx \quad ، \quad \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$$

$$\int_0^2 (x-2)\sqrt{x^2-4x+5}\,dx \quad ، \quad \int_{-1}^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{3+\sin^2 x}}\,dx \quad ، \quad \int_0^1 \frac{e^{2x}-e^x+3}{2e^x}\,dx$$

$$\int_{-1}^2 \frac{3t}{1+2t^2}\,dt \quad ، \quad \int_1^2 \frac{t}{2t+1}\,dt \quad ، \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx \quad ، \quad \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln x)} \quad ، \quad \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1+e^x}\,dx$$

$$\int_1^{\ln 3} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\,dx \quad ، \quad \int_1^{e^2} |1-\ln x|\,dx$$

التمرين الثاني

1) أ- تحقق أن $(\forall t \in \mathbb{R}) :\ \frac{t^3}{t^2+1} = t - \frac{t}{t^2+1}$

ب- أحسب $\int_{-1}^{0} \frac{t^3}{t^2+1}\,dt$

2) أ- حدد العددين a , b بحيث :

$$(\forall x \in \mathbb{R}-\{-1,1\}) \ :\ \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

ب- احسب التكامل $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x^2-1}\,dx$

3) أ- حدد العددين a , b بحيث :

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x+1)^2}$$

ب- احسب التكامل $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+3}{(x-1)(x+1)^2}\,dx$

التمرين الثالث

باستعمال مكاملة بالأجزاء أحسب ما يلي :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx \quad ، \quad \int_0^{\ln 2} x e^{2x}\,dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x+1)\ln x\,dx \quad ، \quad \int_1^3 (x^2-2x)\ln x\,dx$$

$$\int_0^{\ln 2} x\left(e^{2x}+e^{-x}\right)dx \quad ، \quad \int_0^3 (x-1)^2 e^{2x}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx \quad ، \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx \quad ، \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$$

التمرين الرابع

1) أ- تحقق أن

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{-2,2\} \quad \frac{x^2}{4-x^2} = -1 + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}$$

ب- أحسب التكامل $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x^2}{4-x^2}\,dx$

ج- باستعمال مكاملة بأجزاء احسب $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln(4-x^2)\,dx$

2) أ- تحقق أن $\frac{x^2}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}$

ب- باستعمال مكاملة بأجزاء احسب $I=\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$

التمرين الخامس

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب:

$$f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

أ- أحسب الدالة المشتقة $f'(x)$

ب- استنتج حساب التكامل $A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

2- نعتبر التكاملين :

$$B = \int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx \quad و \quad C = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

أ- باستعمال مكاملة بأجزاء عبر عن B بدلالة C

ب- أثبت أن $A+C=B$

ج- استنتج حساب B ; C

التمرين السادس

نضع $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$ و $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$

1) أحسب التكامل J

2) أحسب الجمع $I+J$

3) استنتج حساب التكامل I

التمرين السابع

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ونضع $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}\,dx$

1) أحسب I_1 , I_2

2) بين أن $(I_n)_n$ متتالية تناقصية

3) بين أن $0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$